Soient $(N + 2)$ points $x_0, x_1, \ldots, x_{N+1}$ formant une subdivision Δ de l'intervalle $[0, 1]$ de $\mathbf{R}$ telle que

$$x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N < x_{N+1} = 1.$$

On désigne par $H(\Delta)$ l'ensemble des fonctions numériques h définies et à dérivée première continue sur $[0, 1]$ dont les restrictions à chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ sont des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 3. Le but du problème est la construction d'une fonction du type précédent interpolant sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbf{R}$ une fonction dérivable sur cet intervalle.

I

a. Montrer que $H(\Delta)$ est un espace vectoriel réel.

b. Soient $(\alpha_i)_{i=0,1,\ldots,N+1}$ $(\beta_i)_{i=0,1,\ldots,N+1}$ des scalaires quelconques; montrer que, si elle existe, la fonction $h \in H(\Delta)$ telle que

$$\begin{cases} h(x_i) = \alpha_i \\ h'(x_i) = \beta_i \end{cases} \qquad i = 0, 1, \ldots, N+1$$

où $h'(x)$ désigne la dérivée de h au point x, est unique.

c. Montrer, en les calculant, qu'il existe dans $H(\Delta)$ des fonctions $(a_i)_{i=0,\ldots,N+1}$ et $(b_i)_{i=0,1,\ldots,N+1}$ telles que

$$\begin{cases} a_i(x_j) = \delta_{ij} & b_i(x_j) = 0 \\ a'_i(x_j) = 0 & b'_i(x_j) = \delta_{ij} \end{cases} \qquad j = 0, 1, \ldots, N+1$$

où δ_{ij} désigne le symbole de KRONECKER ($\delta_{ii} = 1$; $\delta_{ij} = 0$, $i \neq j$), $a'_i(x_j)$ et $b'_i(x_j)$ désignant respectivement les dérivées des fonctions a_i et b_i au point x_j.

d. Déduire de ce qui précède la dimension de l'espace vectoriel $H(\Delta)$ et une base de cet espace.

II

a. Préciser le domaine de définition $D \subset \mathbf{R}$ de la fonction numérique f_0 telle que

$$f_0(x) = e^x \cdot \int_x^{+\infty} e^{-t} t^{-1}\, dt.$$

Montrer que cette fonction f_0 est dérivable en tout point $x \in D$ et donner l'expression $f'_0(x)$ de sa dérivée en ce point.

b. Montrer que pour tout $x \in D$ et pour tout $n \in N$, $n \geqslant 1$, l'on a

$$f_0(x) = V_n(x) + W_n(x)$$

où

$$\begin{cases} V_n(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \ldots + (-1)^{n-1} \dfrac{(n-1)!}{x^n} \\ W_n(x) = (-1)^n\, n!\, e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t} t^{-n-1}\, dt \end{cases}$$

c. Étudier la nature de la série numérique de terme général $v_n(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$ où x est fixé dans D.

d. Établir que, pour tout $x \in D$ et tout $n \in N$, $n \geqslant 1$, l'on a la relation suivante :

$$\frac{1}{2}(V_n(x) + V_{n+1}(x)) - \frac{1}{2}|v_n(x)| \leqslant f_0(x) \leqslant \frac{1}{2}(V_n(x) + V_{n+1}(x)) + \frac{1}{2}|v_n(x)|.$$

Donner, pour x fixé supérieur ou égal à 1, la valeur de l'entier n_x qui rend minimum la valeur de $|v_n(x)|$.

On obtient ainsi une approximation de la valeur $f_0(x)$ par la quantité $\frac{1}{2}(V_{n_x}(x) + V_{n_x+1}(x))$ qu'on utilisera dans le *b.* de la troisième question.

III

a. Soit f une fonction dérivable sur un segment $[a, b] \subset R$ $(a < b)$ sur lequel est donnée une subdivision $\Delta(a, b)$ telle que

$$x_0 = a < x_1 < \ldots\ldots < x_N < x_{N+1} = b.$$

Montrer qu'il existe une fonction unique h_f dite H-interpolée de f sur $[a, b]$ relativement à la subdivision $\Delta(a, b)$ telle que h_f soit à dérivée continue sur $[a, b]$ et que la restriction de h_f à tous les intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, N$ soit un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 et telle que l'on ait

$$h_f(x_i) = f(x_i) \qquad i = 0, 1, \ldots, N+1$$
$$h'_f(x_i) = f'(x_i) \qquad i = 0, 1, \ldots, N+1$$

b. En déduire h_{f_0} la H-interpolée de f_0 sur l'intervalle $[6, 8]$ relativement à la subdivision $\Delta(6, 8)$ telle que

$$x_i = 6 + \frac{i}{2} \qquad i = 0, 1, 2, 3, 4.$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail